

Sucesiones Numéricas

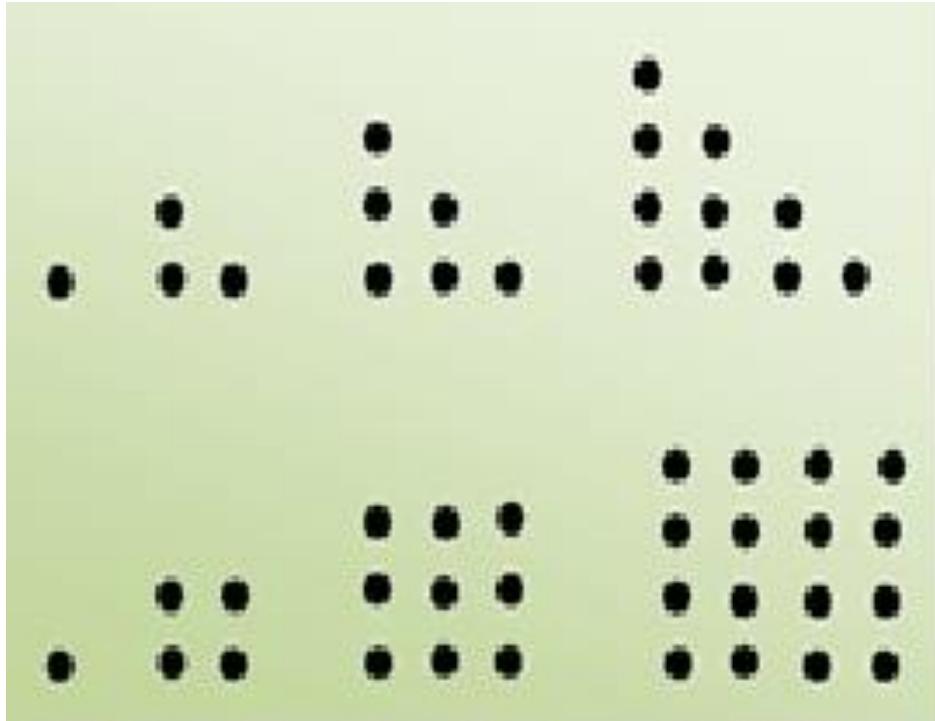
Hoy Estudiaremos:

- ▶ ***La formalización de las sucesiones.***
- ▶ ***“Sucesiones crecientes y decrecientes”.***

Y conoceremos la famosa “Sucesión de Fiboncci”.

Comencemos...

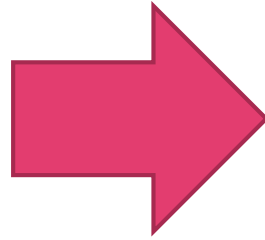
Recordaremos el concepto de sucesión...



Analiza la imagen y responde las preguntas:

1. *¿Existe alguna relación geométrica entre cada uno de los elementos de las regularidades?*
2. *Dibuja el siguiente elemento de cada una de las regularidades.*
3. *¿Cuántos puntos forman cada uno de los elementos? Expresemos esta sucesión mediante su término general.*
4. *¿Existe alguna relación algebraica entre los puntos que forman la base?*
5. *Explica cómo encontrar patrones en una secuencia numérica, geométrica, etc. y ya sea un término específico o general en ellas.*

Veamos la siguiente presentación...



<https://prezi.com/o2z3kqIcd2p9/copy-of-sucesiones-en-la-vida-cotidiana/>

Con respecto a la presentación:
Buscar 5 ejemplos cotidianos de sucesión



- 
- Una sucesión es un conjunto ordenado de números reales:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Donde cada elemento de la sucesión se denomina término, el subíndice es el lugar que ocupa en la sucesión, de esta forma:

El primer término es a_1 , el segundo a_2 , el tercero a_3 ...

- Ejemplo: En la sucesión de los números pares:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,

¿Cuál es el primer término? R: 2

¿Cuál es el quinto término? R: 10

Sucesiones Recurrentes

Los términos de estas sucesiones se obtienen a partir de las anteriores.

*Una de ellas es la conocida:
“Sucesión de Fibonacci”*

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

¿Cuál es el sexto término? 8

¿Cuál es el séptimo término? 13

¿Cuál es la ley de formación?

Cada término es la suma de los dos anteriores, Así:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

La sucesión cambia si se modifican los dos primeros términos

Ejercicio: Calcula los 9 primeros términos de una sucesión con la misma ley de formación con $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$

¡¡Comencemos con las Progresiones !!

- ▶ También conocida como una sucesión, **es un conjunto infinito de números ordenados** que tienen un comportamiento común entre si.
- ▶ A los números que forman la sucesión se les llama términos y todas las sucesiones tienen un primer término seguido de otros **que cumplen con una regla entre ellos.**
- ▶ Una sucesión se puede representar mediante una expresión que permite conocer el valor de cada término sabiendo el lugar **(*n*)** que ocupa.
- ▶ Estudiaremos las más conocidas:

Progresión Aritmética y Progresión Geométrica

Progresión Aritmética (P.A.)

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números llamados **términos**, en la que cualquier término es el resultado de sumar al anterior una cantidad constante (positiva o negativa), llamada **diferencia común** y se calcula como:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Un término n - menos- es el que le antecede.

Ejemplos:

1. En: **1, 6, 11, 16...**

La cantidad constante que se suma es: 5

$$1 + 5 = 6$$

$$6 + 5 = 11$$

$$11 + 5 = 16$$

2. En: **45, 42, 39, 36...**

aquí la cantidad que se suma es: -3

$$45 + (-3) = 42$$

$$42 + (-3) = 39$$

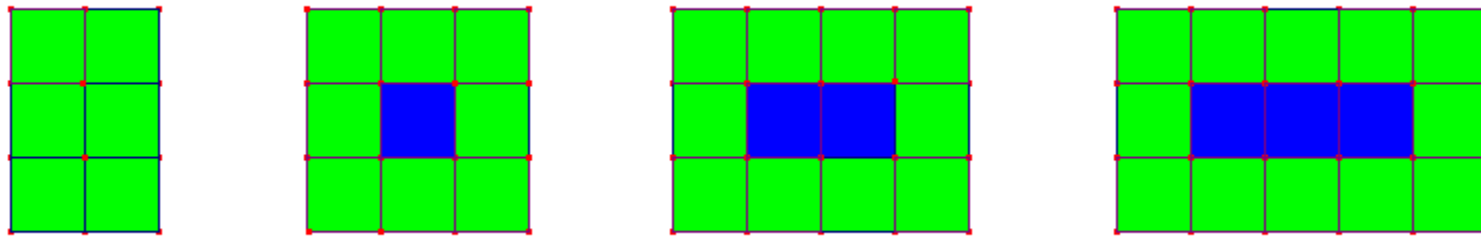
$$39 + (-3) = 36$$

Progresión Aritmética

- **Una progresión finita es aquella que tiene un número determinado de términos.**
- **Una progresión infinita es aquella que tiene un número indefinido de términos.**

Pensemos...

- ▶ *En la sucesión numérica del número de cuadrados azules. ¿Cuál es el valor del primer término? ¿Cuál es la diferencia?*



- ▶ *En la sucesión numérica del número de cuadrados verdes. ¿Cuál es el valor del primer término? ¿Cuál es la diferencia?*

En una Progresión Aritmética

- ▶ Para calcular el enésimo término de cualquier progresión aritmética utilizamos:

$$\ell = a + (n-1)d$$

- ▶ **Donde:**

ℓ = último término

n = número de términos

a = primer término

d = la diferencia común

Veamos otro ejemplo: En 4, 8, 12, 16, 20, 24 ...

Tenemos que:

El primer término (a) es 4 y la diferencia común (d) es 4,
ya que $8 - 4 = 4$, $12 - 4 = 4$.

El número de términos (n) es 6.

Primer término: $a = 4$

Segundo término: $a + d = 4 + 4 = 8$

Tercer término: $a + 2d = 4 + 2(4) = 12$

Cuarto término: $a + 3d = 4 + 3(4) = 16$

Quinto término: $a + 4d = 4 + 4(4) = 20$

Sexto término: $a + 5d = 4 + 5(4) = 24$

Ahora Ustedes, A trabajar!!!

Completen la siguiente tabla:

Progresión	Primer Término <i>a</i>	Diferencia común <i>d</i>	Valor del 8° término <i>l</i>	Clasificación de la progresión (Finita o Infinita)
12, 18, 24, 30, 36				
-3, -3/2, 0, 3/2, 3, 9/2 ...				
2, 6, 10, 14, 18, 22				
1/2, 1, 1 1/2, 2 ...				

Además en una P.A. la suma de los n primeros términos de este tipo de sucesiones se puede calcular como:

$$S = \frac{n(a + l)}{2}$$

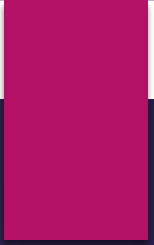
► **Donde:**

S = Suma de los n términos

l = Último término

n = Número de términos

a = Primer término



***Pasemos ahora a las
Progresiones Geométricas
(P.G.)***

Progresiones Geométricas:

- ▶ ***Es una sucesión de números llamados términos, de tal forma que cada uno de ellos, después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante (entero o fracción, positiva o negativa) llamada razón común.***

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Entonces:
El término general de una progresión geométrica.

► **En una progresión geométrica:**

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^4$$

.....

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Sea la “Progresión Geométrica”:

$$6/3, 12/3, 24/3\dots$$

Aquí

La razón común es $r = 2$, dado que:

$$(6/3) \cdot 2 = 12/3$$

$$(12/3) \cdot 2 = 24/3$$

En este caso los elementos de una progresión geométrica son:

a = Primer término

r = La razón común

l = Último término o enésimo término

n = Número de términos

Progresión Geométrica

En este caso: Para calcular el enésimo término tenemos:

$$\ell = a r^{n-1}$$

► **Donde :**

a = primer término

r = la razón común

ℓ = último término o enésimo término

n = número de términos

En el caso de las P.G. Tenemos:

- ▶ La suma de los n primeros términos se podría calcular como:

$$S = \frac{\ell r - a}{r - 1}$$

- ▶ ***Cuando $r \neq 1$***

Donde :

a = primer término

r = la razón común

ℓ = último término o enésimo término

Veamos un ejemplo de: Suma de términos de una progresión geométrica

Imagina la siguiente situación:

“Un alumno del 4º Medio le cuenta un secreto a un compañero, a las 9 de la mañana, a dos compañeros, a las 10, cada uno de ellos se lo han contado a otros dos, una hora más tarde, los cuatro alumnos que acaban de conocer el secreto se lo cuentan a otros dos y así sucesivamente”.

- Determina la sucesión del número de personas que conocen el secreto cada hora a partir de las 8 de la mañana.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

¿Es una progresión geométrica? ¿Por qué? ¿Cuál es la razón? R: $r = 2$

¿A cuántas personas les cuentan el secreto a las 2 de la tarde? R: 64

¿Cuántas personas conocen el secreto a las 2 de la tarde? R: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = \text{¿?}$

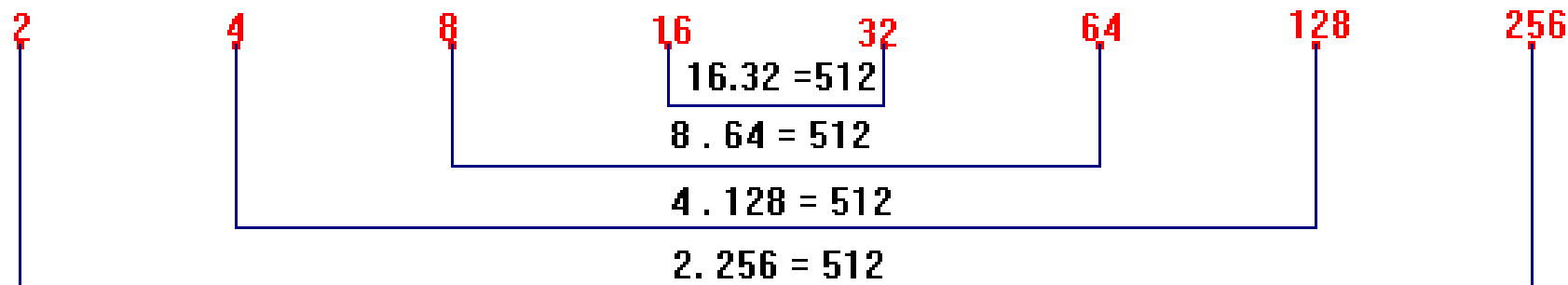
- Para realizar esta suma con facilidad aplica la fórmula vista anteriormente:

$$S = \frac{\ell r - a}{r - 1}$$

Producto de los términos de una progresión geométrica (P.G.)

► La sucesión: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... es una progresión geométrica de razón, $r = 2$.

► Para multiplicar los 8 primeros términos se observa que:



► El producto de los 8 primeros términos, $P_8 = (512)^4 = 2^{36}$

► En general el producto de n términos es:

$$P_n = (a_n \cdot a_1)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{(a_n \cdot a_1)^n}$$

Ejemplos de progresiones geométricas

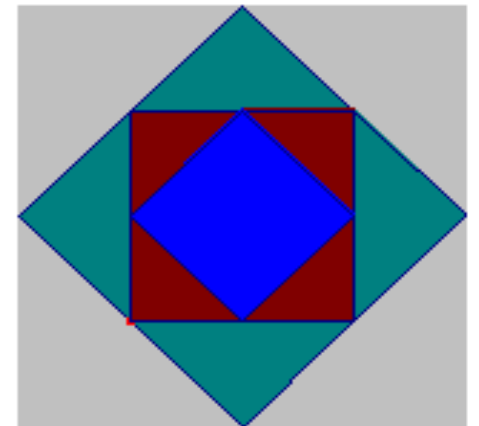
Supongamos que el lado del cuadrado gris de la figura mide 1 unidad

¿Cuál es el valor de su área?

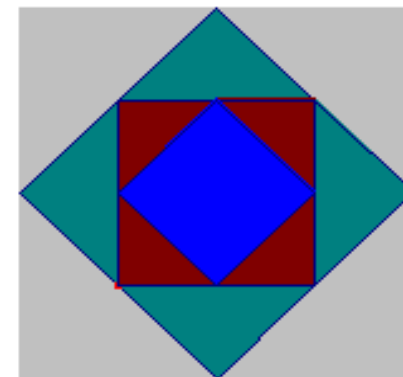
¿Cuánto vale el área del cuadrado verde?

¿Y el área del cuadrado rojo?

¿Y la del cuadrado azul?



Observa que el proceso de construcción de los cuadrados puede continuar indefinidamente y sus áreas forman la sucesión:



1, 1/2, 1/4, 1/8, ... , QUE ES UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DE RAZÓN 1/2

❖ DESAFIO:

CONSIDEREN LA SUCESIÓN FORMADA POR LAS LONGITUDES DE LOS LADOS:

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \dots,$$

¿ES UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA?

¿SI ES ASÍ, CUÁL SERÍA LA RAZÓN DE ESTA PROGRESIÓN?

Progresiones geométricas: crecientes, decrecientes y oscilantes.

- ▶ Una progresión geométrica es **creciente** si su razón r es mayor que 1

Por ejemplo la sucesión de los múltiplos de 3:

3, 9, 27, 81, 243, ...

- ▶ Una progresión geométrica es **decreciente** si su razón r es mayor que 0 y menor que 1

Por ejemplo la sucesión con $r = 1/2$ y $a_1 = 1$:

1, 1/2, 1/4, 1/8,

- ▶ Una progresión geométrica es **oscilante** si su razón r es un número negativo

Por ejemplo la sucesión con $r = -1$ y $a_1 = 1$:

1, -1, 1, -1, 1, -1, ...